Capítulo 2

Lernmatrix.

2.1. Contexto.

Un análisis cuidadoso de la bibliografía que se ha generado a través de los años en relación con el tema de las memorias asociativas, nos permite percatarnos de que antes de la década de los setenta brilló por su ausencia la producción de trabajos en el área. Notables excepciones fueron la *Lernmatrix*, surgida en los albores de la década de los sesenta (Steinbuch, 1961; Steinbuch & Frank, 1961) y que constituye el tema central de este capítulo, y el *correlograph* (capítulo 2), cuyo advenimiento acaeció en las postrimerías de esa misma década (Willshaw, Buneman & Longuet-Higgins, 1969).

En los inicios de la siguiente década llegaría la generación 1972 de científicos que produjeron trabajos claves en el devenir de las memorias asociativas: Anderson, Kohonen, Amari y Nakano.

2.2. El trabajo de Steinbuch.

Karl Steinbuch fue uno de los primeros investigadores en desarrollar un método para codificar información en arreglos cuadriculados conocidos como *crossbar* (Simpson, 1990). La importancia de la *Lernmatrix* (Steinbuch, 1961; Steinbuch & Frank, 1961) se evidencia en una afirmación que hace Kohonen en su artículo de 1972, donde apunta que las matrices de correlación, base fundamental de su innovador trabajo, vinieron a sustituir a la *Lernmatrix* de Steinbuch.

La *Lernmatrix* es una memoria heteroasociativa que puede funcionar como un clasificador de patrones binarios si se escogen adecuadamente los patrones de salida: es un sistema de entrada y salida que al operar acepta como entrada un patrón binario $\mathbf{x}^\mu \in A^n$, $A = \{0, 1\}$ y produce como salida la clase $\mathbf{y}^\mu \in A^p$ que le corresponde (de entre p clases diferentes), codificada ésta con un método simple, a saber: para representar la clase $k \in \{1, 2, ..., p\}$, se asignan a las componentes del vector de salida $\mathbf{y}^\mu$ los siguientes valores: $y^\mu_k = 1$, y $y^\mu_j = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots p$.

En la siguiente figura se esquematiza la fase de aprendizaje para la *Lernmatrix* de Steinbuch, al incorporar la pareja de patrones de entrenamiento $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \in A^n \times A^p$.

	x^μ_1	x^μ_2	$\cdots$	x^μ_j	$\cdots$	x^μ_n
y^μ_1	m_{11}	m_{12}	$\cdots$	m_{1j}	$\cdots$	m_{1n}
y^μ_2	m_{21}	m_{22}	$\cdots$	m_{2j}	$\cdots$	m_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y^μ_i	m_{i1}	m_{i2}	$\cdots$	m_{ij}	$\cdots$	m_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y^μ_p	m_{p1}	m_{p2}	$\cdots$	m_{pj}	$\cdots$	m_{pn}

(2.1)

Cada uno de los componentes m_{ij} de $\mathbf{M}$, la *Lernmatrix* de Steinbuch, tiene valor cero al inicio, y se actualiza de acuerdo con la regla $m_{ij} + \Delta m_{ij}$, donde:

$$\Delta m_{ij} = \begin{cases} +\varepsilon \text{ si } x^\mu_i = 1 = y^\mu_j \\ -\varepsilon \text{ si } x^\mu_i = 0 \text{ y } y^\mu_j = 1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \tag{2.2}$$

siendo ε una constante positiva escogida previamente.

La fase de recuperación consiste en encontrar la clase a la que pertenece un vector de entrada $\mathbf{x}^\omega \in A^n$ dado. Encontrar la clase significa obtener las coordenadas del vector $\mathbf{y}^\omega \in A^p$ que le corresponde al patrón $\mathbf{x}^\omega$; en virtud del método de construcción de los vectores $\mathbf{y}^\mu$ la clase debería obtenerse sin ambigüedad.

La i-ésima coordenada y_i^ω del vector de clase $\mathbf{y}^\omega \in A^p$ se obtiene como lo indica la siguiente expresión, donde $\bigvee$ es el operador *máximo*:

$$y_i^\omega = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{j=1}^{n} m_{ij}.x_j^\omega = \bigvee_{h=1}^{p} \left[\sum_{j=1}^{n} m_{hj}.x_j^\omega\right] \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \tag{2.3}$$

Ejemplo 1.-

Sean $p = 3$, $n = 5$ y $\varepsilon > 0$. Es decir, se tienen 3 clases de patrones de dimensión 5; las primeras tres asociaciones se presentan a continuación:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para iniciar la creación (fase de aprendizaje) de la *Lernmatrix*, se asigna el valor cero a todos los elementos m_{ij} y se realizan las operaciones de la crossbar 2.1 y la expresión 2.2 con la primera pareja de asociaciones:

	$x_1^1 = 1$	$x_2^1 = 0$	$x_3^1 = 1$	$x_4^1 = 0$	$x_5^1 = 1$
$y_1^1 = 1$	ε	$-\varepsilon$	ε	$-\varepsilon$	ε
$y_2^1 = 0$	0	0	0	0	0
$y_3^1 = 0$	0	0	0	0	0

La segunda pareja de asociaciones provoca los siguientes cambios en la matriz:

	$x_1^2 = 1$	$x_2^2 = 1$	$x_3^2 = 0$	$x_4^2 = 0$	$x_5^2 = 1$
$y_1^2 = 0$	ε	$-\varepsilon$	ε	$-\varepsilon$	ε
$y_2^2 = 1$	ε	ε	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	ε
$y_3^2 = 0$	0	0	0	0	0

Y finalmente con la tercera pareja la matriz toma el siguiente aspecto:

	$x_1^3 = 1$	$x_2^3 = 0$	$x_3^3 = 1$	$x_4^3 = 1$	$x_5^3 = 0$
$y_1^3 = 0$	ε	$-\varepsilon$	ε	$-\varepsilon$	ε
$y_2^3 = 0$	ε	ε	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	ε
$y_3^3 = 1$	ε	$-\varepsilon$	ε	ε	$-\varepsilon$

(2.4)

Es decir,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

La fase de recuperación consiste en presentarle a la matriz $\mathbf{M}$ uno de los patrones de entrada y realizar las operaciones indicadas en la expresión 2.3: a la salida se espera obtener la clase a la que pertenece el vector de entrada. Iniciemos con el patrón $\mathbf{x}^1$.

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

Se observa que: $\sum_{j=1}^{5} m_{1j}x_j^1 = 3\varepsilon$; $\sum_{j=1}^{5} m_{2j}x_j^1 = \varepsilon$ y $\sum_{j=1}^{5} m_{3j}x_j^1 = \varepsilon$. Por ello. $\sum_{j=1}^{5} m_{1j}x_j^1 = \bigvee_{h=1}^{p} \left[\sum_{j=1}^{5} m_{hj}x_j^1\right]$ y de acuerdo con la expresión 2.3. se tiene que $y_1^1 = 1$ y $y_2^1 = 0 = y_3^1$. Por lo tanto. el vector que representa a la clase es:

$$\mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Recuperemos la clase a la que pertenece el patrón de entrada $\mathbf{x}^2$.

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 3\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$$

En este caso se observa que: $\sum_{j=1}^{5} m_{1j}x_j^2 = \varepsilon$; $\sum_{j=1}^{5} m_{2j}x_j^2 = 3\varepsilon$ y $\sum_{j=1}^{5} m_{3j}x_j^2 = -\varepsilon$. Por ello, $\sum_{j=1}^{5} m_{2j}x_j^2 = \bigvee_{h=1}^{p} \left[\sum_{j=1}^{5} m_{hj}x_j^2\right]$ y de acuerdo con la expresión 2.3, se tiene que $y_2^2 = 1$ y $y_1^2 = 0 = y_3^2$. Por lo tanto, el vector que representa a la clase es:

$$\mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

finalmente recuperemos la clase a la que pertenece el patrón de entrada $\mathbf{x}^3$.

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \\ 3\varepsilon \end{pmatrix}.$$

En este caso se observa que: $\sum_{j=1}^{5} m_{1j}x_j^3 = \varepsilon$; $\sum_{j=1}^{5} m_{2j}x_j^3 = -\varepsilon$ y $\sum_{j=1}^{5} m_{3j}x_j^3 = 3\varepsilon$. Por ello. $\sum_{j=1}^{5} m_{3j}x_j^3 = \bigvee_{h=1}^{p} \left[\sum_{j=1}^{5} m_{hj}x_j^3\right]$ y de acuerdo con la expresión 2.3, se tiene que $y_3^3 = 1$ y $y_1^3 = 0 = y_2^3$. Por lo tanto, el vector que representa a la clase es:

$$\mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.-

Surge una cuestión interesante: ¿qué pasa si hay más vectores de entrada que clases?.

Dado que sólo existen tres clases diferentes, un cuarto patrón debe pertenecer necesariamente a una de esas tres clases.

Asignemos la clase $\mathbf{y}^1$ al vector de entrada $\mathbf{x}^4$ dado por:

$$\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eso significa que debemos modificar la matriz 2.5 llevando a cabo las operaciones de la expresión 2.2 en la crossbar 2.4:

	$x_1^4 = 0$	$x_2^4 = 1$	$x_3^4 = 0$	$x_4^4 = 1$	$x_5^4 = 1$
$y_1^1 = 1$	0	0	0	0	2ε
$y_2^1 = 0$	ε	ε	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	ε
$y_3^1 = 0$	ε	$-\varepsilon$	ε	ε	$-\varepsilon$

Ahora la nueva *Lernmatrix*, que se representará con el símbolo $\mathbf{M}_{4patrones}$, es:

$$\mathbf{M}_{4patrones} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

Recuperemos la clase para cada uno de los 4 vectores de entrada, de acuerdo con la expresión 2.3:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{4patrones} \cdot \mathbf{x}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{4patrones} \cdot \mathbf{x}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ 3\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{4patrones} \cdot \mathbf{x}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^3
\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{1patrones} \cdot \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{clase } \mathbf{y}^1$$

Se observa que la recuperación se realizó de manera exacta para los cuatro patrones, a pesar de que hay más patrones que clases. Hasta aquí la *Lernmatrix* luce como un clasificador preciso. Cuando se aumenta el número de patrones, ocurre el fenómeno llamado saturación.

Ejemplo 3.-

Ejemplifiquemos el fenómeno de *saturación* en la *Lernmatrix* de Steinbuch, y para ello modifiquemos la matriz $\mathbf{M}_{1patrones}$ con la pareja:

$$\mathbf{x}^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A partir de la matriz:

$$\mathbf{M}_{1patrones} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

y de la pareja $(\mathbf{x}^5, \mathbf{y}^3)$ obtenemos:

	$x_1^5 = 0$	$x_2^5 = 0$	$x_3^5 = 1$	$x_4^5 = 0$	$x_5^5 = 1$
$y_1^3 = 0$	0	0	0	0	2ε
$y_2^3 = 0$	ε	ε	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	ε
$y_3^3 = 1$	0	-2ε	2ε	0	0

La nueva *Lernmatrix*, que se representará con $\mathbf{M}_{5patrones}$ es:

$$\mathbf{M}_{5patrones} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al intentar recuperar la clase para cada uno de los cinco patrones de entrada, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{5patrones} \cdot \mathbf{x}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ \varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{¿clase } \mathbf{y}^1 \text{ o } \mathbf{y}^3\text{?} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{5patrones} \cdot \mathbf{x}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ 3\varepsilon \\ -2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{5patrones} \cdot \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^3$$

$$\mathbf{M}_{5patrones} \cdot \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ \varepsilon \\ -2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^1$$

$$\mathbf{M}_{5patrones} \cdot \mathbf{x}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ 0 \\ 2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{¿clase } \mathbf{y}^1 \text{ o } \mathbf{y}^3\text{?}$$

El fenómeno de saturación en todo su esplendor.

2.3. Consideraciones finales del capítulo.

Steinbuch es un buen ejemplo de la manera en que los trabajos pioneros en un campo específico del quehacer humano tienen trascendencia con el paso de los años... y de los siglos. Las recientes declaraciones de Robert Hecht-Nielsen, el notable científico creador de las redes neuronales conocidas como *counterpropagation*, lo constatan: Hecht-Nielsen es el director científico de un millonario proyecto de la DARPA (Defense Advanced Research Projects Agency) de los Estados Unidos, cuyo objetivo es el diseño y construcción de un novedoso tipo de redes neuronales conocidas como redes cortrónicas; estas redes, según pregona el mencionado investigador, tienen como base la Lernmatrix del alemán Steinbuch (*www.gcn.com*).